Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques

**Session 2023** • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

**1. Refroidissement de l'eau d'un spa** (12 questions) **Page 3**

**2. Contrôle qualité et étude des clients d'une minoterie** (12 questions) **Page 7**

**3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

**Sujet officiel (PDF) :** https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

# 1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Après avoir chauffé l’eau du spa à 38 °C, on coupe son alimentation électrique et on modélise la température par une fonction vérifiant une équation différentielle. L’exercice étudie ce modèle, son évolution et sa limite, puis le délai d’une alarme et un algorithme de suivi.

## Partie A

**Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.**

On écrit l’équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. Pour une équation $y' = ay$, les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, avec $C$ constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

---

**Question 2. Déterminer, sur [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.**

1. Pour une fonction constante $y(t) = k$, on a $y' = 0$.
2. L’équation devient $0{,}05k = 1{,}25$, donc $k = 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

---

**Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.**

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène. Elles sont donc de la forme $Ce^{-0{,}05t} + 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, où $C \in \mathbb{R}$.

---

**Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.**

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant $C$, on obtient l’expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

## Partie B

**Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.**

$f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$, soit 28,9 °C au dixième près. Après 24 heures sans chauffage, l'eau du spa est donc à environ 28,9 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ 28,9 °C.

**Question 2.a. Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.**

1. La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$.
2. Le terme constant a une dérivée nulle, d'où l'expression de $f'$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

**Question 2.b. Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis indiquer si ce sens paraît cohérent avec le contexte et argumenter.**

Comme $e^{-0{,}05t} > 0$, on a $f'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, $f$ est strictement décroissante.

- C'est cohérent avec le refroidissement après la coupure.
- La température se rapproche de la température ambiante, 25 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ est strictement décroissante, ce qui correspond au refroidissement de l'eau.

**Question 3.a. Déterminer la limite de f en +∞.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Dans $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, seul le terme constant subsiste à la limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

**Question 3.b. Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.**

> À long terme, la température de l'eau se rapproche de 25 °C, qui est la température ambiante extérieure supposée constante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La température de l'eau tend vers la température ambiante de 25 °C.

**Question 4.a. L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme retentisse. Donner la valeur exacte de cette durée, puis son arrondi à la minute.**

1. Au seuil, $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$.
2. En prenant le logarithme, $t = 20\ln(13/11)$ heures, soit environ 200,465 minutes.
3. L'alarme retentit dès que la température passe strictement sous 36 °C, juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : $20\ln(13/11)$ h. Arrondie à la minute : 200 min, soit 3 h 20 min.

**Question 4.b. Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui augmente H d'une heure et actualise T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.**

À $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34{,}161$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $T \approx 33{,}714 < 34$ : elle s'arrête et affiche $H = 8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur affichée : $H = 8$.

**Question 4.c. Expliquer ce que l'algorithme de la question précédente permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.**

L'algorithme augmente le temps par pas d'une heure jusqu'à ce que la température calculée soit strictement inférieure à 34 °C.

Il repère donc la première heure entière où le modèle prévoit le passage sous ce seuil, sans donner l'instant exact du franchissement.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Il détermine la première heure entière où la température passe sous 34 °C : 8 h après la coupure.

## 2. Contrôle qualité et étude des clients d’une minoterie

Une minoterie contrôle l’extensibilité de pâtes fabriquées avec sa farine et le taux d’humidité de livraisons de blé; elle étudie aussi le poids de ses sacs. L’exercice examine ensuite les probabilités qu’artisans et boulangers industriels testent une nouvelle farine, puis le nombre de clients testeurs dans un échantillon de 200.

### Partie A

**Question 1.a. À partir des cinq indices d’extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.**

La moyenne vaut $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. Les écarts à la moyenne sont $28, 5, 7, -19, -21$. L’écart-type de la série est donc $\sqrt{(28^2 + 5^2 + 7^2 + 19^2 + 21^2)/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

**Question 1.b. En prenant l’écart-type σ égal à 18 mm, vérifier qu’aucune des cinq valeurs n’est en dehors de l’intervalle [x̄ - 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.**

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l’intervalle est $[76 - 2 \times 18\,;\, 76 + 2 \times 18] = [40\,;\, 112]$ mm. Les cinq mesures, de 55 mm à 104 mm, sont toutes comprises dans cet intervalle. Aucune valeur ne déclenche donc le contrôle complémentaire.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure n’est hors de [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n’est nécessaire.

**Question 2. Montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un même silo vide, sachant que le cahier des charges exige un taux d’humidité inférieur à 13 %.**

Le taux d’humidité du mélange est la moyenne pondérée par les masses : $\frac{29\,540 \times 12,4 + 14\,540 \times 14,1}{29\,540 + 14\,540} \approx 12,961$ %. Il est strictement inférieur à la limite de 13 % exigée par le cahier des charges.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux d’humidité : environ 12,961 % ; déchargement autorisé.

## Partie B

**Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.**

On centre et réduit la variable : $P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25-25{,}2}{0{,}1}\right) = P(Z < -2)$, où $Z$ suit la loi normale centrée réduite. La probabilité vaut environ 0,02275, soit 0,023 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0{,}023$.

**Question 2.a. Donner un réel h tel que P(25,2 - h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à $10^{-2}$ près.**

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent à moins de $1{,}96$ écart-type de la moyenne. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}1 = 0{,}196$ kg, soit 0,20 kg au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}20$ kg.

**Question 2.b. À partir de la représentation graphique de la fonction de densité fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la densité de la variable aléatoire X.**

Une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg contient environ 95 % des masses entre $25{,}2 - 1{,}96 \times 0{,}1$ et $25{,}2 + 1{,}96 \times 0{,}1$, soit environ [25,00 ; 25,40] kg. Or la courbe du sujet est bien plus étalée autour de 25,2 kg : elle ne correspond pas à cette dispersion.

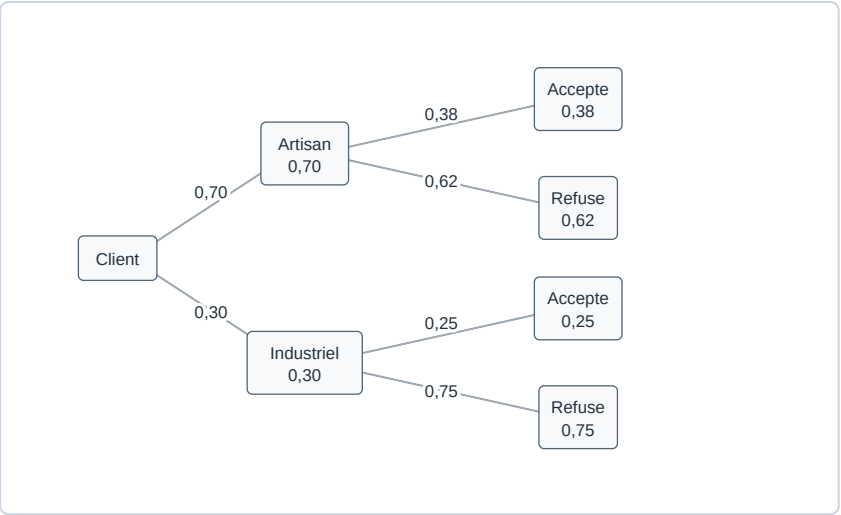
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour représenter la densité de $X$.

## Partie C

**Question 1. Représenter par un arbre pondéré la situation décrivant le type de client et son acceptation de tester la farine La Romaine.**

L'arbre commence par le type de client : 70 % sont artisans boulangers et 30 % sont boulangers industriels. Depuis chaque branche, on distingue l'acceptation et le refus. Les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation.

**Arbre pondéré des clients et du test de La Romaine**




A : artisan boulanger ; I : boulanger industriel.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Artisan : 0,70 ; industriel : 0,30. Acceptation : 0,38 chez les artisans et 0,25 chez les industriels.

**Question 2.a. Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.**

L'événement demandé correspond au chemin « artisan puis accepte ». La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \cap T) = 0,266$.

**Question 2.b. Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.**

L'acceptation peut arriver par deux chemins incompatibles : artisan qui accepte, ou industriel qui accepte. Ainsi, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

**Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'il soit un artisan boulanger.**

La probabilité conditionnelle recherchée est $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Avec les résultats précédents, $P(A \mid T) = \frac{0{,}266}{0{,}341} \approx 0,7801$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'il soit artisan est 0,780.

**Question 4.a. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine.**

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,341)$, l'événement « au plus 60 » est $Y \leq 60$. La somme des probabilités binomiales jusqu'à 60 vaut environ 0,1249, soit 0,125 au millième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

**Question 4.b. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour une loi binomiale, $E(Y) = np$. Donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur de nombreux échantillons de 200 clients, environ 68 clients en moyenne auront testé la farine.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients en moyenne.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

**Bilan de l'épreuve :** Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1 et dure 2 heures; aucun coefficient n'est indiqué. Elle étudie le refroidissement de l'eau d'un spa par équation différentielle, puis les contrôles qualité d'une minoterie, une loi normale et des probabilités conditionnelles et binomiales liées au poids des sacs et au test d'une nouvelle farine.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on obtient les solutions en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Une fonction f(t) = Ae^(-kt) + L, avec A et k positifs, décroît vers L lorsque t tend vers +∞.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule par moyenne pondérée des taux, avec les masses comme poids.
- Pour Y suivant une loi binomiale de paramètres n et p, E(Y) = np et P(Y ≤ k) est une probabilité cumulée.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : temps en heures, température en degrés Celsius et masse en kilogrammes.
- Pour le contrôle des échantillons, comparer chaque mesure aux bornes de l'intervalle $\bar{x} \pm 2\sigma$.
- Pour le mélange de blé, pondérer les taux d'humidité par les masses des deux livraisons.
- En probabilité conditionnelle, distinguer l'événement conditionnant et respecter le degré d'arrondi demandé.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment déterminer le temps auquel l'eau atteint une température programmée ?**

Égalisez f(t) à la température cible dans f(t) = 13e^(-0,05t) + 25. Isolez l'exponentielle, puis utilisez le logarithme népérien pour calculer t. Convertissez ensuite la fraction d'heure en minutes et appliquez l'arrondi demandé.

**Q : Comment calculer le taux d'humidité après le mélange des deux livraisons ?**

Multipliez la masse de chaque livraison par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, divisez par la masse totale de blé, puis comparez le pourcentage obtenu à la limite stricte de 13 %.

**Q : Comment traiter la question binomiale portant sur 200 clients ?**

Utilisez la loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Pour « au plus 60 », calculez P(Y ≤ 60) à l'aide d'une probabilité cumulée. Calculez l'espérance avec np, puis interprétez-la comme le nombre moyen de testeurs.

**Q : Quels éléments faut-il soigner dans les réponses pour respecter les attentes ?**

Respectez le rang d'arrondi indiqué et conservez les valeurs non arrondies dans les calculs intermédiaires. Justifiez les décisions par une comparaison ou une formule adaptée, puis interprétez les résultats numériques dans le contexte et avec les unités appropriées.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

**Ressources BTS Métiers du Géomètre-Topographe et de la Modélisation Numérique :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.