Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point M, situé au fond d'un tiroir, et le point O, au fond du meuble, est modélisée par une fonction du temps. L'exercice étudie cette fonction avec une équation différentielle, ses variations et un algorithme qui repère le moment où le tiroir est fermé, puis analyse sa tangente et son développement limité.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Ainsi, $r = \frac{-5 \pm 3}{2}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 à l'aide du tableau fourni.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la position du point M et de sa vitesse à l'instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

À l'instant initial, la distance OM est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La vitesse négative donnée est celle de la distance OM, donc $f'(0) = -10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2. b. En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne la distance OM en centimètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 3. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes, et justifier.

La fonction est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Or $f(0)=20>0{,}5$ et $f(4)=\frac{70}{3}e^{-4}-\frac{10}{3}e^{-16}\approx 0{,}427<0{,}5$. Le seuil est donc atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. Sachant que la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞ est nulle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Leurs multiples tendent également vers 0, donc leur différence tend vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

Question 1. b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 0 à l'infini, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y=0$.

Question 2. a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec $(e^{at})'=ae^{at}$: le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le second $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t)=-\frac{70}{3}e^{-t}+\frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t)<0$, la fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0)=20$ et tend vers 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

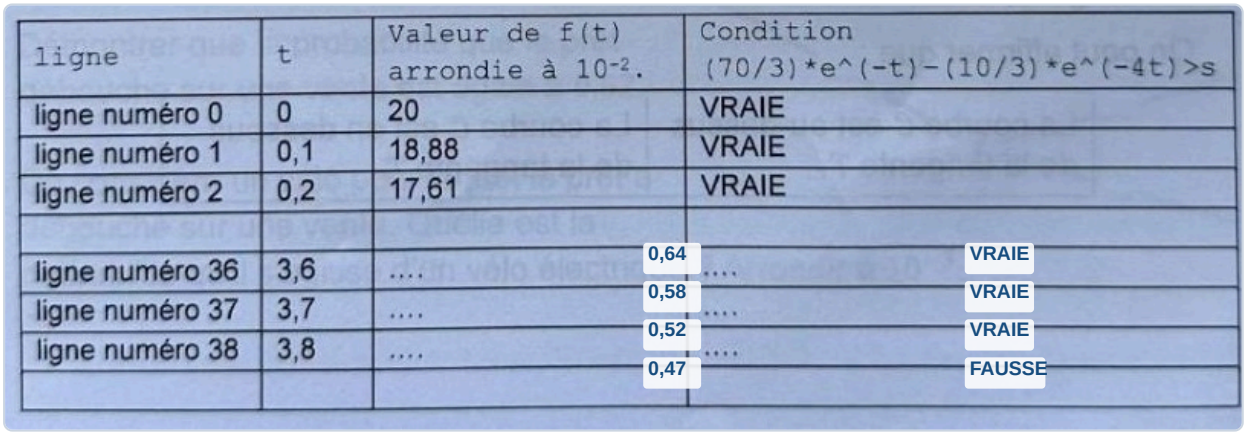
f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3. a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en poursuivant jusqu'à son arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie à 10^{-2} et le résultat du test de la condition.**

À chaque passage dans la boucle, t augmente de 0,1. Le test est équivalent à $f(t) > 0{,}5$. À 3,8 s, il est encore vrai ; à 3,9 s, il devient faux et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Dernière ligne : 39, avec $t = 3{,}9$.

Question 3. b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

À $t = 3{,}9$, la condition $f(t) > 0{,}5$ est fausse. La distance OM est alors inférieure à 0,5 cm : le tiroir est fermé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le tiroir est fermé au bout de 3,9 s, donc en moins de 4 s.

Question 4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Avec $f(0) = 20$ et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$, on obtient l'équation demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4. b. Parmi les réponses proposées, choisir le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux : terme constant, terme linéaire et terme quadratique. Le reste est négligeable devant t^2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + o(t^2)$.

Question 4. c. Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe représentative de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Aucune justification n'est demandée.

Pour t proche de 0 et positif, le terme dominant de l'écart entre la courbe et sa tangente est $-15t^2$, qui est négatif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

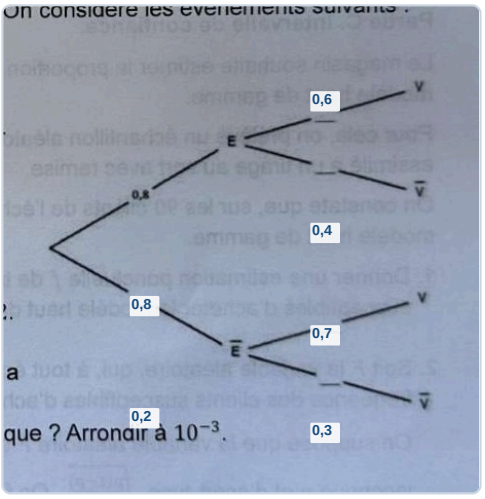
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques à des clients dans l'espoir de réaliser une vente, avec des taux de vente différents selon le type de vélo. L'exercice porte aussi sur le temps de réparation de 80 vélos et sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente, à partir des données fournies.

La première branche sépare les deux types de vélos : électrique (0,8) et mécanique (0,2). Depuis chaque type, on place la probabilité de vente donnée dans l'énoncé. La probabilité d'absence de vente est son complément à 1 : 0,4 pour un vélo électrique et 0,3 pour un vélo mécanique. Le schéma annoté reprend ces six probabilités.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Vente : 0,6 ou 0,7 ; absence de vente : 0,4 ou 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'un vélo choisi au hasard soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

Pour obtenir l'événement « vélo électrique et vente », on suit la branche électrique puis celle de la vente. La probabilité de cette issue est le produit des probabilités inscrites sur ces deux branches : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. Elle représente 48 % des prêts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut suivre l'une de deux branches incompatibles : vélo électrique ou vélo mécanique. La probabilité totale est la somme des probabilités de ces deux issues.

$$P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,48 + 0,14 = 0,62.$$

La probabilité demandée est donc bien égale à 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62.$

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité d'être sur la branche électrique sachant que la vente a eu lieu. On rapporte donc la probabilité d'une vente électrique à celle de toute vente :

$$P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62} = \frac{24}{31} \approx 0,7741935.$$

L'arrondi au millième s'obtient en conservant trois chiffres après la virgule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774.$

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi pour l'échantillon de 80 vélos réparés.**

Pour chaque vélo réparé, on considère comme succès une réparation qui nécessite moins d'une heure. La probabilité de succès est $0,62$, et l'échantillon compte 80 vélos. La variable X dénombre les succès parmi ces 80 épreuves de Bernoulli. Les paramètres de la loi binomiale sont donc l'effectif et la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est :

$$P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40} \approx 0,0082826.$$

Arrondir au millième donne $0,008$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure soit strictement supérieur au nombre de vélos dont la réparation nécessite plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

1. Le nombre de réparations nécessitant plus d'une heure est pris comme le complément de X, soit $80 - X$.
2. L'inégalité demandée devient $X > 80 - X$, donc $X > 40$, soit $X \geq 41$.
3. Pour $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$, le calcul de la probabilité de cette queue binomiale donne environ $0,9809$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée, arrondie au millième, est $0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$, soit 60 % des clients de l'échantillon.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2. a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % pour la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.

On applique la formule fournie avec $f = 0,6$ et $n = 90$:

$$f \pm 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0,6 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{90}}.$$

La marge vaut environ $0,1012$. Les bornes sont donc environ $0,4988$ et $0,7012$, soit au millième $0,499$ et $0,701$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un intervalle de confiance à 95 % est $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2. b. Indiquer si l'on peut être certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Non. Le niveau de confiance de 95 % caractérise la méthode de construction de l'intervalle, et non une certitude absolue sur la valeur inconnue. La proportion réelle peut se trouver en dehors de l'intervalle calculé.

- L'intervalle fournit une estimation encadrée.
- Il ne garantit pas l'appartenance de p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, d'une durée de deux heures et de coefficient 2, sauf Traitement des matériaux (coefficient 3). Deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle, fonction et algorithme, puis les probabilités d'un magasin de vélos, la loi binomiale et l'intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme générale des solutions.
- Une fonction dont la dérivée est négative sur un intervalle y est strictement décroissante.
- Dans un arbre pondéré, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les branches correspondant à l'événement.
- Pour une variable X suivant B(n,p), $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et tenir compte du signe négatif de la vitesse initiale du tiroir.
- Pour l'algorithme, poursuivre le tableau jusqu'au premier test faux et distinguer la valeur finale des valeurs précédentes.
- Pour une comparaison dans l'échantillon, traduire exactement la condition en fonction de X et de l'effectif total.
- L'intervalle de confiance à 95 % ne permet pas d'affirmer avec certitude que p appartient à l'intervalle calculé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de fermeture ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution. Utilisez ensuite les valeurs de f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt aboutisse à une vente ?

Additionnez les probabilités des branches qui aboutissent à une vente. Pour chaque branche, multipliez la probabilité du type de vélo par la probabilité conditionnelle de vente pour ce type.

Q : Comment répartir le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux, avancez d'abord sur les questions accessibles et réservez quelques minutes à la vérification des calculs, des unités et des arrondis demandés.

Q : Que signifie un niveau de confiance de 95 % pour l'intervalle demandé ?

Il ne garantit pas que la proportion inconnue p soit dans l'intervalle calculé pour cet échantillon. Le niveau de 95 % décrit la confiance associée à la méthode d'estimation utilisée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers du Géomètre-Topographe et de la Modélisation Numérique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.