Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, un tableau donne le nombre de personnes équipées d'un implant médical de 2013 à 2021. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel des données et une fonction issue d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. À partir du changement de variable y = ln(N - 30), compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie, en arrondissant les valeurs au millième.

On applique la transformation demandée à chaque effectif du tableau. Par exemple, pour 2013 : $y = \ln(56,25 - 30) \approx 3,268$. Les rangs et les valeurs transformées, arrondies au millième, sont :

Année	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**
Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = \ln(N - 30)$	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeurs de y : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$ donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2609$. En arrondissant séparément ces deux coefficients au centième, on obtient l'équation de la droite d'ajustement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de droite obtenue, déduire que le nombre N de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k de l'année, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, on a $N = 30 + e^{y}$. En remplaçant y par son expression ajustée, on obtient $N(k) = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$, ce qui donne le modèle demandé. N est exprimé en milliers de personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

Question 3.a. En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

Le rang de l'année 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. En utilisant le modèle fourni : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers. L'arrondi au millier près porte sur le nombre de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 104 000 personnes.

Question 3.b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.

Lorsque k tend vers $+\infty$, $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées sans limite, tandis que la population reste fixée à 60 millions.

- À long terme, le modèle finirait par prévoir plus de personnes équipées que d'habitants.
- Il n'est donc pas valable à long terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle finit par dépasser les 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Une équation différentielle de la forme $y' = ay$ a pour solutions $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0,05$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$. L'équation devient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$. Cette constante vérifie bien l'équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la constante 1. On ajoute à cette solution la solution générale de l'équation homogène (E_0), soit $Ce^{-0{,}05t}$. On obtient ainsi toutes les solutions de (E) sur $[0;+\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La solution générale est $g(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$. La condition initiale donne $g(0) = 1 + C = 8$, donc $C = 7$. En remplaçant la constante, on obtient l'expression de g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$.

Question 2. **À l'aide du modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où f(t) est exprimé en milliers et t mesure le nombre d'années depuis 2013, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

En 2026, le temps écoulé depuis 2013 est $t = 2026 - 2013 = 13$ ans. Le modèle donne $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05\times 13}} \approx 96,685$ milliers. On arrondit ce résultat au millier de personnes près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, on a $e^{-0{,}05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05t}}$ tend donc vers 1, et $f(t)$ tend vers 450. Les valeurs de f étant en milliers, cette limite correspond à 450 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) fournie, déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

L'expression fournie est $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, son numérateur et son dénominateur sont strictement positifs. Ainsi, $f'(t) > 0$ sur $[0;+\infty[$, donc f est strictement croissante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

On résout $f(t) > 120$: cela équivaut à $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, puis à $t > \dfrac{\ln(11/28)}{-0{,}05} \approx 18{,}69$. Comme t correspond aux années écoulées depuis 2013 et que f est croissante, le premier rang entier dépassant ce seuil est $t = 19$, soit l'année 2032.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre dépassera 120 000 personnes à partir de 2032.

2. Approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement

Une machine d'usine est alimentée en eau par un réservoir et en bouteilles vides par une file d'entrée. L'exercice étudie les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1 à 4. Associer chacune des quatre phrases numérotées du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite. A désigne l'événement « la file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée » et B l'événement « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée » ; A et B sont indépendants, avec P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02. Écrire les quatre associations sans justification.

La phrase 1 correspond à l'événement complémentaire de A, donc sa probabilité vaut $1 - P(A) = 0,97$. La phrase 2 décrit $A \cap \overline{B}$, associé à C. Pour la phrase 3, l'indépendance donne $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,0006$. Enfin, le défaut d'approvisionnement est l'événement $A \cup B$, de probabilité $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,0494$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller sur 200 jours

Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour donné est de 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner sans justification la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque journée constitue une épreuve de Bernoulli : une panne survient avec la probabilité constante $p = 0,025$, et les journées sont indépendantes. La variable X compte le nombre de pannes au cours de 200 journées. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres le nombre d'épreuves $n = 200$ et la probabilité de panne $p = 0,025$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,025)$, avec $n = 200$ et $p = 0,025$.

Partie B

Question 2.a. La loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

L'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson utilise le paramètre $\lambda = np$. Ici, le nombre de jours observés est $n = 200$ et la probabilité de panne chaque jour est $p = 0,025$. On obtient donc $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie au 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on calcule la probabilité cumulée en additionnant les probabilités des entiers de 0 à 10. Ainsi, $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \approx 0,9863047$. L'arrondi demandé au millième est donc 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour la loi de Poisson, déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La loi de Poisson de paramètre 5 donne, pour tout entier k, $P(Y = k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}$. En prenant $k = 15$, on obtient $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!} \approx 0,000157245$. Cette valeur est strictement positive ; le graphique la rend seulement presque imperceptible.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157245 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau des volumes mesurés au centilitre près pour les 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée par les effectifs est $\bar{x} = \frac{73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7}{100} = 74,73$ cL. L'écart type de la série des 100 mesures est la racine de la moyenne des écarts au carré : $\sigma = \sqrt{\frac{17(73-74,73)^2 + 20(74-74,73)^2 + 43(75-74,73)^2 + 13(76-74,73)^2 + 7(77-74,73)^2}{100}} \approx 1,1032$ cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74,73$ cL et $\sigma \approx 1,10$ cL.

Partie C

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H_0 : m = 75 et H_1 : m ≠ 75, déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95 à 10^{-2} près. Sous H_0, Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11.**

Sous H_0, la moyenne de Z est 75 cL et son écart type est 0,11 cL. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs d'une loi normale est situé à environ 1,96 écart type de la moyenne. Donc $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$ cL, soit 0,22 cL à 10^{-2} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

Au seuil de 5 %, la règle consiste à comparer la moyenne de l'échantillon à l'intervalle central de 95 % obtenu sous H_0. Avec $h \approx 0,22$ cL, cet intervalle est $[75 - 0,22\,;\,75 + 0,22] = [74,78\,;\,75,22]$ cL. Une moyenne située dans cet intervalle conduit à accepter H_0 ; une moyenne extérieure conduit à la rejeter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Accepter H_0 si $74,78 \leq \bar{x} \leq 75,22$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne obtenue avec les 100 bouteilles est $\bar{x} = 74,73$ cL. La borne inférieure de l'intervalle d'acceptation est 74,78 cL, donc la moyenne observée est inférieure à cette borne de 0,05 cL. Elle n'appartient pas à l'intervalle $[74,78\,;\,75,22]$ cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de deux heures et à coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur la modélisation du nombre de personnes équipées d'un implant médical et sur une machine à embouteiller. Les compétences évaluées incluent ajustement, équations différentielles, probabilités, lois de Poisson et test statistique bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement de variable y = ln(N - 30) permet de linéariser le modèle avant l'ajustement affine, puis de retrouver N par transformation inverse.
- La solution générale de y' + ay = c s'obtient en ajoutant une solution particulière constante à la solution générale de l'équation homogène.
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de succès suit B(n,p) ; l'approximation de Poisson utilise λ = np.
- Dans un test bilatéral à 95 %, l'intervalle central sous H_0 a une probabilité de 0,95 ; on compare la moyenne observée à ses bornes.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le nombre de personnes équipées est exprimé en milliers dans les modèles.
- Convertir correctement l'année en temps écoulé depuis 2013 pour toute extrapolation.
- Pour les événements indépendants, distinguer les complémentaires et utiliser P(A ∩ B) = P(A)P(B).
- Dans le test, comparer la moyenne observée à l'intervalle de décision et distinguer l'écart type des volumes de celui de la moyenne.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de l'ajustement linéaire au modèle exponentiel de l'exercice 1 ?

On ajuste les valeurs transformées y = ln(N - 30) en fonction du rang k. On remplace ensuite y par l'expression affine de la droite et on applique l'exponentielle pour isoler N.

Q : Pourquoi P(Y = 15) n'est-elle pas nulle pour la loi de Poisson étudiée ?

Pour λ = 5, la formule P(Y = k) = e^(-5)5^k/k! est strictement positive pour tout entier k. La représentation graphique peut rendre la valeur très petite et peu visible, mais elle n'est pas nulle.

Q : Comment répartir son temps entre les questions de cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 2 sont indépendantes. Avancez sans vous bloquer, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les arrondis, les unités et les conclusions.

Q : Quels coefficients s'appliquent selon la spécialité ?

Le coefficient est 1 en Analyses de biologie médicale et en Biotechnologies, 2 en Bio analyses et contrôles et en Bioqualité, et 1,5 en Europlastics et composites.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers du Géomètre-Topographe et de la Modélisation Numérique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.