Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d’un chariot et étude de la fonction vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude de la fonction vitesse

Un chariot de fête foraine est lancé à 20 m·s⁻¹ puis ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée par une équation différentielle, puis par l'analyse de ses variations, de la distance parcourue, de son développement limité et de la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On utilise la formule fournie pour l'équation homogène $y' + ay = 0$: ses solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y vaut $a = 0,8$. En le remplaçant dans la formule, on obtient les solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. Pour vérifier qu'elle satisfait (E), on substitue $g(t) = 5$ dans le membre de gauche : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. On retrouve bien le membre de droite de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien solution de (E).

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). À cette solution, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée (E_0), déterminées à la question précédente. Cette somme donne l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Les solutions de (E) s'écrivent $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc $f(0) = 5 + k$. La condition $f(0) = 20$ impose $5 + k = 20$, d'où $k = 15$. On remplace alors la constante par cette valeur dans la solution générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle tend donc vers zéro. Par somme et produit, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro et il ne reste que le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative d'une fonction ayant une limite finie en $+\infty$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$, où L est cette limite. Ici, $L = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression de f'(t) fournie, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur tout l'intervalle : la fonction est strictement décroissante. Elle vaut $f(0) = 15 + 5 = 20$ au départ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Le terme $15e^{-0,8t}$ l'est donc également, et $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste toujours supérieure à 5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: elle ne peut donc jamais s'annuler.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et ne s'annule pas.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15 ; ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. C'est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **À l'aide de la formule donnée pour la distance parcourue, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental de l'intégration, la distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée : $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette expression est la valeur exacte. Son évaluation donne environ $15,3251$ m, à arrondir au centimètre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel affiche la partie polynomiale $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, il faut donc retenir celle qui contient ce reste et le polynôme affiché.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'expression de la fonction, $f(0) = 15 + 5 = 20$. La dérivée fournie donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'équation demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

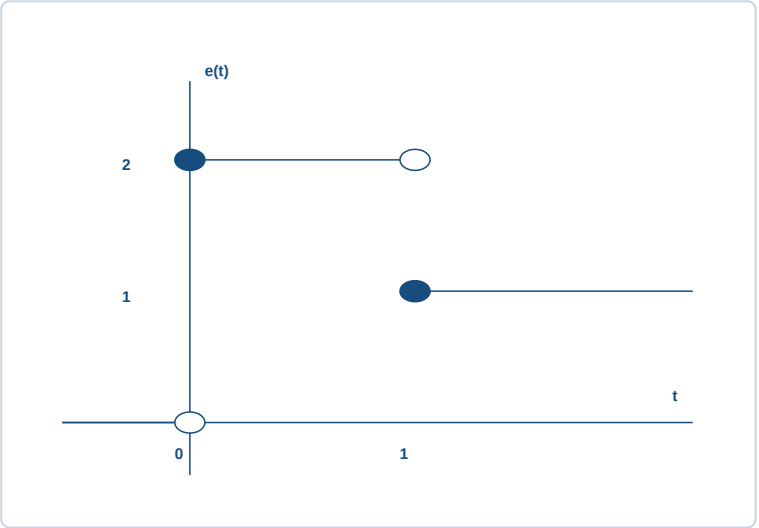
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Le sujet demande de représenter le signal d’entrée, d’utiliser les transformées de Laplace pour étudier le signal de sortie, puis d’en déterminer une valeur et la limite à long terme.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il vaut 0 avant 0. À partir de 0, les deux termes donnent 2, puis le terme retardé retranche 1 à partir de t = 1. La définition de l’échelon donne U(0) = 1 : aux instants de saut, la valeur est donc celle du palier de droite. Le tracé comporte ainsi un palier à 2 sur [0 ; 1[, puis un palier à 1 sur [1 ; +∞[.

Signal d’entrée e(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le signal vaut 0 avant 0, 2 de 0 inclus à 1 exclu, puis 1 à partir de 1 inclus.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-a)) = e^{-ap}/p$. Ici, le retard vaut une unité, donc la transformée de $U(t-1)$ est e^{-p}/p. En appliquant les coefficients du signal d’entrée, on obtient deux termes : celui du premier échelon est multiplié par 2, et celui de l’échelon retardé est soustrait.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La transformée du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e^(−p).

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat précédent, on obtient $S(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p}\right)$. On distribue le facteur $1/(p+1)$ dans la parenthèse. Le facteur exponentiel reste associé au terme retardé, ce qui donne bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

On réduit les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$, et le dénominateur est $p(p+1)$. L'égalité est ainsi vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies, c'est-à-dire $p \neq 0$ et $p \neq -1$. Cette décomposition en éléments simples servira au calcul des transformées inverses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La décomposition demandée est $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(−p) et de [1/(p + 1)]e^(−p).

Le formulaire associe directement $1/p$ à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à l'exponentielle causale. Pour les deux autres expressions, on utilise la propriété du retard d'une unité : si une transformée est multipliée par e^{-p}, la fonction correspondante est décalée et devient nulle avant $t = 1$. Les quatre correspondances, dans l'ordre demandé, sont les suivantes.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, puis $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition précédente donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Les transformées inverses du second terme sont retardées d'une unité et valent donc zéro sur $[0;1[$. Il reste alors l'inverse de $2/p - 2/(p+1)$. Sur cet intervalle, $U(t) = 1$, d'où l'expression de la sortie.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

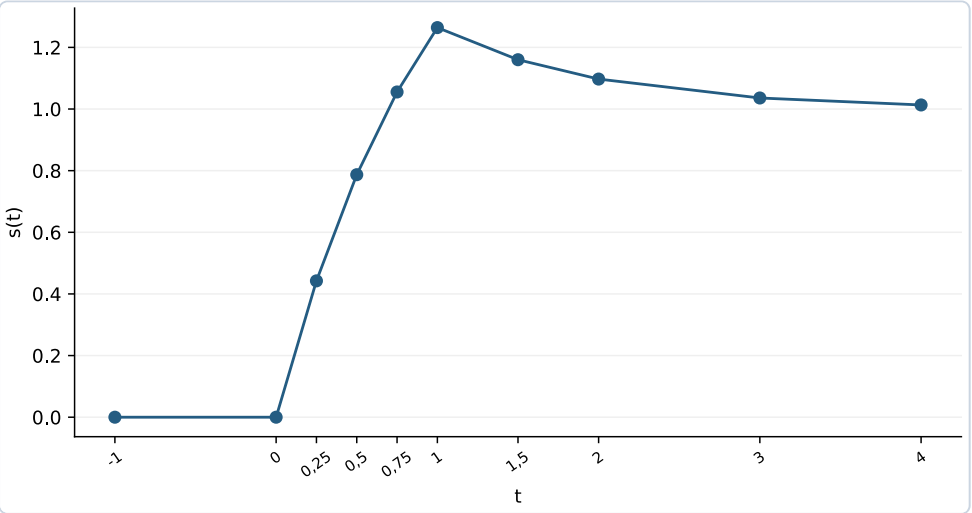
Question 5.a. Sachant que, pour t appartenant à [1 ; +∞[, s(t) = (e − 2)e^(−t) + 1, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.

La formule donnée s'applique à partir de $t = 1$. En remplaçant t par 1, on trouve $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, cette expression se simplifie en $2 - 2/e$. Numériquement, elle vaut environ 1,264 ; arrondie au dixième, la valeur est 1,3.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur exacte est $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$, soit environ $1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Pour $t < 0$, le signal est nul par causalité. Sur $[0;1[$, on trace $2(1 - e^{-t})$, puis, à partir de 1, la branche donnée par $1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions coïncident en $t = 1$, avec la valeur $2 - 2/e$: la courbe est continue à ce point. Elle croît jusqu'à 1, puis décroît vers l'asymptote horizontale d'équation $s = 1$.



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de 0, atteint $2 - 2/e$ en 1, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, le signal s'écrit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Le facteur $e-2$ est constant et e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme ajouté à 1 tend donc vers 0. La limite de la sortie est ainsi égale à 1, conformément à l'asymptote horizontale de sa courbe.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite du signal de sortie lorsque t tend vers $+\infty$ est 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot par équation différentielle et un système électrique par transformées de Laplace, avec analyse de fonctions et de signaux.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle, calculée par la différence des valeurs d'une primitive.
- La transformée de Laplace de f(t − a)U(t − a) est F(p)e^(−ap) : le facteur exponentiel correspond au retard a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 après avoir déterminé l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers une limite positive avec une vitesse qui atteint zéro : seule cette dernière correspond à un arrêt.
- Pour les signaux définis par morceaux, respecter les intervalles et vérifier la valeur au point de raccord t = 1.
- Associer correctement chaque facteur e^(−p) à un retard d'une unité lors de l'utilisation du formulaire de Laplace.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle : $d = \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt$. Si F est une primitive de f, alors $d = F(t_1) - F(t_0)$. On exprime le résultat en mètres et on effectue l'arrondi demandé.

Q : Comment traiter le retard d'une unité dans une transformée de Laplace ?

La propriété de retard associe à f(t − 1)U(t − 1) la transformée F(p)e^(−p). Le facteur exponentiel représente le décalage temporel ; il faut appliquer cette propriété à toute l'expression retardée.

Q : Combien de temps et de points sont prévus pour cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Le coefficient dépend de la spécialité : 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique.

Q : Quelles indications de notation sont données pour le QCM ?

Pour la question à choix multiples sur le développement limité, une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, plusieurs réponses ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers du Géomètre-Topographe et de la Modélisation Numérique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.