Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2018/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d’un train à très haute vitesse et aire d’une pièce de gare

L’exercice étudie la distance parcourue par un wagon à propulsion électromagnétique, modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. Il porte ensuite sur les variations, la vitesse et l’objectif de départ, puis sur le calcul de l’aire hachurée d’une pièce de gare représentée dans un repère.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0 en utilisant la formule fournie.

On compare l’équation à la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, avec une constante réelle C. Cette expression est définie sur tout l’intervalle demandé $[0, +\infty[$. En effet, sa dérivée vaut $0,2Ce^{0,2t}$, et la soustraction de $0,2y(t)$ donne bien zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que g(t) = −15t − 75 est une solution de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. Puis on remplace y par g dans le membre de gauche de l’équation :

$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

On retrouve le membre de droite pour tout t. La fonction g vérifie donc bien l’équation différentielle sur son intervalle de définition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière de (E).

Question 3°. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Pour résoudre l’équation complète, on ajoute à une solution particulière toutes les solutions de l’équation homogène associée. La solution particulière donnée est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $Ce^{0,2t}$. Leur somme constitue l’ensemble des solutions de (E).

La constante C peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'à t = 0 le wagon est au point de départ.

1. Dans la solution générale, on pose $t = 0$: $f(0) = C - 75$.
2. La condition initiale impose $f(0) = 0$, donc $C - 75 = 0$ et $C = 75$.
3. On remplace cette constante dans la solution générale. La fonction obtenue vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition de départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel fournit $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$. Sur $[0, 3]$, on a $0, 2t \geq 0$, donc $e^{0,2t} \geq 1$. Le facteur 15 étant positif, le signe de la dérivée est celui de $e^{0,2t} - 1$, qui est positif ou nul sur l'intervalle. L'inégalité est ainsi vérifiée pour chaque valeur de t comprise entre 0 et 3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	positif ou nul	
Variation de f	croissante	
Valeur de f	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

La dérivée étant positive ou nulle sur tout l'intervalle, f y est croissante. Elle passe de 0 km à environ 16,659 km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à environ $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance après une minute se calcule en évaluant la fonction donnée à $t = 1$: $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cette valeur est d'environ $1,605$ km. L'énoncé demande un arrondi au dixième de kilomètre : le chiffre des centièmes est 0, donc on conserve le dixième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1,6$ km.

Question 3° a). La vitesse à l'instant t étant donnée par f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$, en kilomètres par minute. Pour $t = 2$, l'exposant vaut $0,4$, d'où $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$. L'arrondi au dixième donne la vitesse demandée à la deuxième minute.

> La vitesse est exprimée ici en km/min, comme le précise la question.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min à $t = 2$ minutes.

Question 3° b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse. L'objectif est d'atteindre 400 km·h⁻¹ en moins de deux minutes.

À deux minutes, la vitesse vaut $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ km/min. Pour la comparer à l'objectif, on convertit en kilomètres par heure en multipliant par 60. Comme la vitesse démarre à zéro et augmente sur $[0, 3]$, si elle dépasse 400 km/h à deux minutes, elle a nécessairement franchi ce seuil avant deux minutes.

- Vitesse à deux minutes : environ $442,642$ km/h.
- Elle dépasse donc 400 km/h avant l'échéance.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint en moins de deux minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En remplaçant par les expressions de la fonction et de sa dérivée, puis en regroupant les termes, on obtient une expression affine de pente $15(e^{0,4} - 1)$. Il s'agit de la proposition dont le terme constant est $45e^{0,4} - 75$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions l'aire A_1 du rectangle OPQR, exprimée en unités d'aire, à partir du repère et du schéma.

Le schéma montre le rectangle $OPQR$ entre l'axe des ordonnées et la verticale d'abscisse 3. Sa largeur est donc 3 unités. Le bord supérieur du rectangle est la droite $y = 2,25$, et son bord inférieur est l'axe des abscisses : sa hauteur vaut 2,25 unités.

L'aire est le produit de ces dimensions, ce qui correspond à la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A_2 de la partie du plan limitée par la courbe de $g(x) = 27x/(2x^2 + 18)$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La fonction $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est son intégrale sur cet intervalle. La primitive fournie est $\frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)$. Ainsi, $A_2 = \frac{27}{4}[\ln(x^2 + 9)]_0^3 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A hachurée, exprimée en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

1. Le schéma et l'énoncé indiquent une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$.
3. On double cette aire : $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,142513$. L'arrondi au millième est donc 4,143 unité d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse

L'exercice examine le recoupement entre obsolescence technique et logicielle sur une population de smartphones, puis la proportion de téléphones non réparables dans un lot prélevé au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral comparant un sondage sur la marque B aux résultats d'une enquête auprès de 180 personnes.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé, compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Les effectifs correspondant à 3 % et 8 % sont 6 et 16. Parmi les 16 smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2 smartphones.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et $P_l(T)$, où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les données donnent directement la proportion touchée par chaque type d'obsolescence : 3 % pour T et 8 % pour L. Parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T. Ces proportions s'écrivent sous forme de probabilités.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T) = 0,03 ; P(L) = 0,08 ; P_L(T) = 0,125.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∩ L).

1. La probabilité conditionnelle donne $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$.
2. Donc $P(T \cap L) = 0,08 \times 0,125 = 0,01$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∩ L) = 0,010.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∪ L).

Pour l'union, on additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection, comptée deux fois :

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∪ L) = 0,100.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P_t(L).

1. On utilise $P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)}$.
2. Ainsi, $P_T(L) = 0,01/0,03 = 1/3$, soit 0,333 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P_T(L) = 0,333.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que X, le nombre de smartphones non réparables parmi un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est un essai de Bernoulli : la probabilité d'obtenir un smartphone non réparable est constante, égale à 0,045. Les 50 tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc ils sont indépendants. Le nombre de smartphones non réparables suit ainsi une loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

1. Tous les smartphones sont réparables lorsque $X = 0$.
2. La probabilité cherchée est donc $P(X = 0) = (1 - 0,045)^{50} = 0,955^{50}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité est environ 0,100, soit 10,0 %.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme, puis compléter le tableau avec P(X = i) et la valeur cumulée de S pour i allant de 0 à 3.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S cumulée	0,100	0,336	0,608	0,813

À chaque étape de la boucle, on ajoute la probabilité correspondant à i à la somme précédente.

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,1	0,236	0,272	0,205
S	0,1	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S cumulée : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du lot de smartphones.

L'algorithme additionne les probabilités pour $i = 0, 1, 2, 3$. Sa somme finale vaut donc $P(X \leq 3)$: c'est la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. Avec les probabilités non arrondies, cette somme est environ 0,813.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Un lot de 50 smartphones contient en moyenne 2,25 smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H_0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

L'intervalle central de 95 % d'une loi normale correspond à environ 1,96 écart-type de chaque côté de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième. C'est la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H_0 : p = 0,55 et H_1 : p ≠ 0,55.

La zone de conservation de H_0 est centrée sur 0,55, avec une demi-largeur arrondie $h = 0,07$.

- Si la fréquence observée appartient à [0,48 ; 0,62], on ne rejette pas H_0.
- Sinon, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si 0,48 ≤ f ≤ 0,62 ; la rejeter sinon.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée est $76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de la zone de conservation de H_0. On rejette donc H_0 au seuil de 5 % : la proportion observée est significativement inférieure à 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 % : la fréquence observée est inférieure à 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2018, code MATGRB1, durée deux heures et coefficient variable selon la spécialité, de 1 à 3. L'exercice 1 modélise le départ d'un train à très haute vitesse et calcule l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 évalue probabilités conditionnelles, loi binomiale et test bilatéral autour de l'obsolescence programmée des smartphones.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' − ay = 0, les solutions sont y(t) = k e^(at), où k est une constante.
- La dérivée d'une fonction distance donne la vitesse instantanée ; convertir les unités avant de comparer la vitesse à 400 km·h⁻¹.
- Une aire sous une courbe positive se calcule par l'intégrale de la fonction sur l'intervalle ; utiliser la symétrie pour obtenir l'aire totale.
- Pour X suivant B(n, p), E(X) = np ; une probabilité conditionnelle vérifie $P_a(B) = P(A \cap B)/P(A)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, distinguer la solution homogène et une solution particulière avant d'appliquer la condition initiale.
- Pour les variations, résoudre f'(t) ≥ 0 puis indiquer clairement les intervalles de croissance et de décroissance.
- Dans un tableau à double entrée, contrôler les totaux des lignes et des colonnes par rapport à l'effectif total.
- Pour un test, appliquer la règle de décision au seuil donné et formuler la conclusion dans le contexte, sans présenter le non-rejet comme une certitude.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on ajoute une solution particulière pour obtenir la solution générale. On remplace ensuite la variable par la valeur initiale et on utilise la condition donnée pour déterminer la constante.

Q : Comment choisir les paramètres d'une loi binomiale dans un exercice de prélèvement ?

Il faut identifier le nombre fixe d'essais n, la probabilité p d'un succès et vérifier que les essais sont indépendants avec la même probabilité. La variable compte alors le nombre de succès parmi les n essais.

Q : Comment gérer les questions à choix multiples et les arrondis pendant l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Pour les choix multiples indiqués, une réponse fausse ou absente ne rapporte ni n'enlève de point. Conservez des valeurs intermédiaires précises et arrondissez seulement au niveau demandé.

Q : Que faut-il vérifier pour conclure correctement un test d'hypothèse ?

Il faut appliquer la règle de décision au seuil indiqué et comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision. Concluez dans le contexte en indiquant si H_0 est rejetée ou non, sans interpréter cette décision comme une certitude absolue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mgtmn.fr/assets/annales/bts-mgtmn/E2 - Mathématiques/2018/BTS MGTMN - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers du Géomètre-Topographe et de la Modélisation Numérique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.